Das binäre Zahlensystem

Wie werden Daten im Computer gespeichert? Beim Übergang von mechanischen Rechenmaschinen zu elektronischen Rechenanlagen mußte für die Ziffern eine Darstellung durch Spannungspegel gesucht werden. Die nächstliegende Methode bei sogenannten Digitalrechnern war, die Ziffern als verschieden hohe Spannungspegel zu repräsentieren.

Information läßt sich am einfachsten und wirtschaftlichsten in den zwei Zuständen *High* (kurz: *H* oder 1) und *Low* (kurz: *L* oder) darstellen. So lag es nahe, die kleinste Einheit einer binären Zahl, das Bit, zur Darstellung des zweiwertigen Zustandes eines technischen Systems heranzuziehen. Ein Bit stellt daher eine Abkürzung für *Binary Digit*, d.h. binäre Ziffer oder auch Binärstelle, dar und bezeichnet eine Stelle einer binären Zahl (die in EDV-Anlagen durch ein technisches System, das zwei Zustände annehmen kann, repräsentiert wird).

Wir kennen derartige Codierungen von zwei unterschiedlichen Informationszuständen durch technische Systeme, die zweier Zustände fähig sind, aus dem Alltag: Die schon erwähnte Ölwarnleuchte oder die Batteriewarnleuchte, welche in fast jedem Automobil dem Fahrer Information über Ölstand und Stromversorgung geben, sind derartige Systeme. Bei Aufleuchten zeigen sie den Warnzustand an. Ansonsten befinden sie sich in einem unkritischen Zustand.

Wir verwenden zum Rechnen im Alltag ein dekadisches System. Im dekadischen Zahlensystem stehen die Ziffern von 0 - 9 für eine Zahlenstelle zur Verfügung. Im Computer werden dekadische Zahlen durch binäre Zahlen dargestellt. Das Binärsystem sieht für eine Zahlenstelle nur die Ziffern 0 und 1 vor. Die Schreibweise dekadischer Zahlen, an die wir uns in der Schule gewöhnt haben, ist eine abgekürzte Schreibweise für die Darstellung des tatsächlichen Gesamtwertes. Zum Beispiel schreiben wir 342 und meinen $3 \times 100 + 4 \times 10 + 2 \times 1$. (Übrigens haben wir uns auch daran gewöhnt, die Multiplikation vor der Addition auszuführen, sonst müßte man $(3 \times 100) + (4 \times 10) + (2 \times 1)$ schreiben!)

Durch die positionsabhängige und vereinbarte Stellenbewertung der einzelnen Stellen von 3, 4 und 2 mit 100, 10 und 1 ist es uns möglich, die abgekürzte Schreibweise richtig zu interpretieren (Abb. 3.2):

Abbildung 3.2: Dekadische Zahl

abgekürzte Schreibweise	3	4	2
Stellenwerte	10^2	10^1	10^0
nicht abgekürzte Schreibweise	$3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$		

Die Anzahl der möglichen Ziffern je Stelle bezeichnen wir als **Basis** *b* des Zahlensystems. Beim dekadischen Zahlensystem ist *b* gleich 10. Aufgrund der Häufigkeit seiner Verwendung war es zweckmäßig, für jede Ziffer ein Zeichen vorzusehen. Beim binären Zahlensystem ist *b* gleich 2. Als Ziffern sind und 1 vereinbart. Analog zu den dekadischen Zahlen können wir nun unsere Binärzahlen anschreiben (Abb. 3.3; \`abgek.' steht für abgekürzt und \`gleichw.' steht für gleichwertig):

Abbildung: Binäre Zahl

abgek. Schreibweise	1	0	1	1	0
Stellenwerte	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
gleichw. dekad. Zahl	$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$				

Wir vergleichen nun die dekadische mit der binären Darstellungsform (Abb. 3.4); (Hinweis: Die als Subskript gesetzte Zahl zeigt das jeweilige Zahlensystem an):

Abbildung: Dekadisch = Binär

$0_{10} = 00_2$	$4_{10} = 100_2$	$8_{10} = 1000_2$	$12_{10} = 1100_2$
$1_{10} = 01_2$	$5_{10} = 101_2$	$9_{10} = 1001_2$	$13_{10} = 1101_2$
$2_{10} = 10_2$	$6_{10} = 110_2$	$10_{10} = 1010_2$	$14_{10} = 1110_2$
$3_{10} = 11_2$	$7_{10} = 111_2$	$11_{10} = 1011_2$	$15_{10} = 1111_2$

Mit einer zweistelligen Binärzahl können die dekadischen Zahlen 0 - 3, mit einer dreistelligen Binärzahl die Zahlen 0 - 7 und mit einer vierstelligen Binärzahl die Zahlen 0 - 15, also 16 unterschiedliche Werte, dargestellt werden. Eine Binärzahl mit 8 Stellen bezeichnet man auch als **Byte**. Mit einem Byte können die Zahlen von 0 - 255 dargestellt werden (Abb. 3.5):

Abbildung: Dekadisch = Binär

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
000_{10} = 00000000_2 \\
255_{10} = 11111111_2 \\
\hline
\end{array}
$$

Wir fassen zusammen: Mit einer k-stelligen Binärzahl lassen sich 2^k Zahlen darstellen. Eine praktisch wichtige Frage für uns lautet: Wie gewinnen wir eine Binärzahl aus einer dekadischen Zahl? Als eine einfache Methode bietet sich die wiederholte Division mit Rest an. Dieses Verfahren sei an einem Beispiel erläutert. Wir nehmen an, 245_{10} soll als Binärzahl dargestellt werden (Abb. 3.6).

Abbildung 3.6: Divisionsverfahren

$245 : 2 = 122$	(Rest:1, $b_0 = 1$)
$122 : 2 = 61$	(Rest:0, $b_1 = 0$)
$61 : 2 = 30$	(Rest:1, $b_2 = 1$)
$30 : 2 = 15$	(Rest:0, $b_3 = 0$)
$15 : 2 = 7$	(Rest:1, $b_4 = 1$)
$7 : 2 = 3$	(Rest:1, $b_5 = 1$)
$3 : 2 = 1$	(Rest:1, $b_6 = 1$)
$1 : 2 = 0$	(Rest:1, $b_7 = 1$)
Ergebnis: $245_{10} = 11110101_2$	

Verfahren:
Wir dividieren wiederholt durch 2 und schreiben den Rest (oder 1) an, bis der Dividend wird. Die Binärzahl, welche aus den angeschriebenen Resten gebildet wird, ist die gesuchte Binärzahl.

Die einzelnen Bit, die wir mit b_0 - b_7 bezeichnet haben, werden nach ihrem Stellenwert wieder von rechts nach links angeschrieben. Bit ist also ganz rechts, Bit 7 ist ganz links. Bit weist den geringsten Stellenwert (2^0), Bit 7 den höchsten Stellenwert auf. Die Umwandlung einer Binärzahl in eine dekadische Zahl ist eher einfach. Wir wollen die Binärzahl 11110101 in eine dekadische Zahl verwandeln. Wir wissen nun, daß die einzelnen Stellenwerte einer dekadischen Zahl nach Zehnerpotenzen gewichtet sind:

$$245_{10} = 5 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^2$$

Nun gehen wir analog vor, um den Wert der Stellen einer Binärzahl zu ermitteln. Wir suchen die Zweierpotenzen für jede Stelle und addieren diese Stellenwerte nach Multiplikation mit den Stellenwerten der Binärzahl:

$$\begin{aligned} 11110101_2 &= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 \\ &+ 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^7 \\ &= 1 + 4 + 16 + 32 + 64 + 128 = 245_{10} \end{aligned}$$

245_{10} ist unser Ergebnis im dekadischen System.
(Zum Addieren mit Binärzahlen siehe auch Kapitel 4.)

Contents Index Search
Previous: Einführung **Up:** Zahlensysteme **Next:** Das hexadezimale Zahlensystem

Feedback bitte an: info1@ai.wu-wien.ac.at
Abteilung für Informationswirtschaft, Wirtschaftsuniversität Wien